Mathe SA Zusammenfassung

Inhalt

Matrizenrechnung:

Matrizen

- Ein (Zahlen-) Schema der Form

Spalten

$$(a_{ij}) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n^m$$

Zeilen

heißt $n \times m$ Matrix.

Man schreibt auch $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m} \in \mathbb{R}_n^m$

- Ist $m=1$, so erhält man einen Spaltenvektor ($\mathbb{R}_n$) und mit $n=1$ einen Zeilenvektor ($\mathbb{R}^m$).

Ist $m=n$, so ist die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten und man spricht von einer quadratischen Matrix.

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2×3 Matrix, $a_{22} = 5$

- Spaltenvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $m=1$

Zeilenvektor: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $n=1$

Spezielle Arten von Matrizen

Spaltenvektor

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad m = 1$

Zeilenvektor

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad n = 1$

Spezielle Arten von Matrizen

- Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- quad. Matrix $(m = n)$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
- Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ quadratisch!
- Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix, quadratisch
- Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- transponierte Matrix $A^T: (a_{ij})^T = a_{ji}$

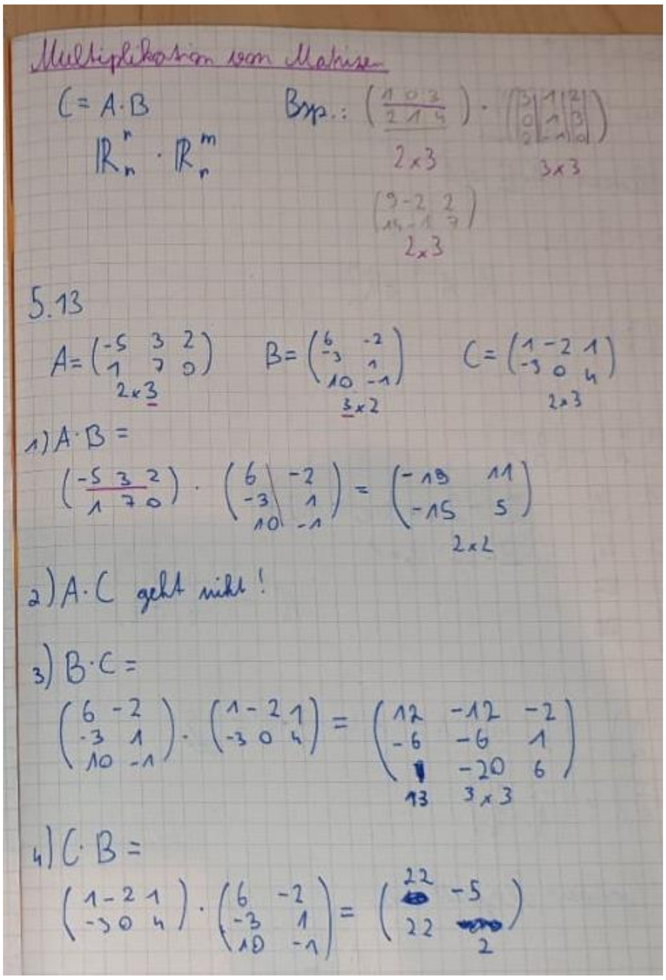
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- symmetrische Matrix $A = A^T$

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ quadratisch

Rechenregeln

Multiplikation



Multiplikation von Matrizen

$C = A \cdot B$

$\mathbb{R}^n_n \cdot \mathbb{R}^m_n$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2×3 $\quad$ 3×3

$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ 14 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

2×3

5.13

$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2×3 $\quad$ 3×2 $\quad$ 2×3

1) $A \cdot B =$

$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 11 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}$

2×2

2) $A \cdot C$ geht nicht!

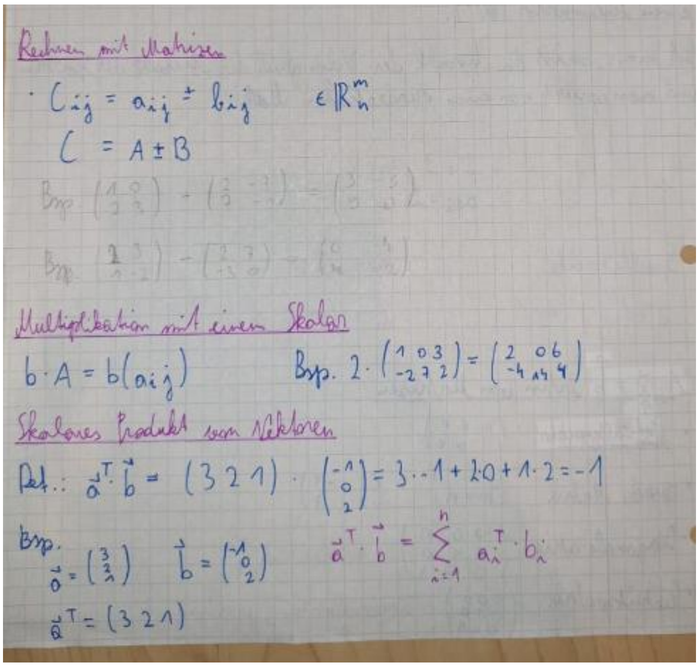
3) $B \cdot C =$

$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -2 \\ -6 & -6 & 1 \\ 13 & -20 & 6 \end{pmatrix}$

3×3

4) $C \cdot B =$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -5 \\ 22 & 2 \end{pmatrix}$



Rechnen mit Matrizen

- $C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad \in \mathbb{R}^m_n$

  $C = A \pm B$

Multiplikation mit einem Skalar

$b \cdot A = b(a_{ij})$ $\qquad$ Bsp. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -4 & 14 & 4 \end{pmatrix}$

Skalares Produkt von Vektoren

Def.: $\vec{a}^T \cdot \vec{b} = (3\ 2\ 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot -1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = -1$

Bsp.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{a}^T \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i^T \cdot b_i$

$\vec{a}^T = (3\ 2\ 1)$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

- kein KG: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- AG: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- Nullmatrix $A \cdot 0 = 0$
  Nullelement
- neutrales Element $A \cdot E = A$

Inverse Matrix

Die inverse Matrix A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = E \qquad A, A^{-1} \in \mathbb{R}^n_n$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Methode 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot a + 2c = 1 \quad \text{I}$

$1 \cdot b + 2 \cdot d = 0 \quad \text{II}$

$3 \cdot a + 4 \cdot c = 0 \quad \text{III}$

$3 \cdot b + 4 \cdot d = 1 \quad \text{IV}$

$\text{III} - 2\text{I}: \; a = -2 \quad c = \frac{3}{2}$

$\text{IV} - 2\text{II}: \; b = 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Methode 2:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = \underline{\underline{-2}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Methode 3: Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \text{I} \cdot (-3) + \text{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \; \text{I} + \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$A \mid E$

$A^{-1} \cdot A \mid A^{-1} \cdot E$

$E \mid A^{-1}$

Determinanten

Determinante

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c = \det A$

$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Anwendungsbeispiele

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

(B)
$$3u + 2v - w = 8$$
$$-u + v + 2w = -1$$
$$u + w = 0$$

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$$
$$\boxed{\vec{x} = A^{-1} \vec{b}} \Rightarrow D \neq 0 \quad (\text{det. } A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

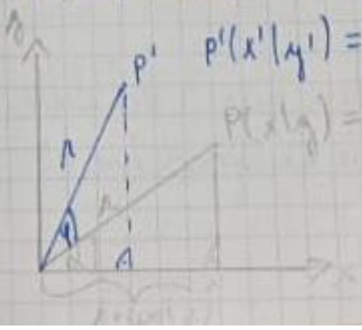
Def.: Matrix $A \in \mathbb{R}^n_n$ ist regulär $\Leftrightarrow rg(A) = n$

Satz: A ist regulär $\Leftrightarrow$ det. $A \neq 0$

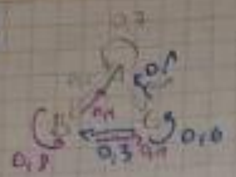
Anwendungen

- lineare Gleichungssysteme
- Drehmatrix und Transformationen

$$P'(x'|y') = (r \cdot \cos(\alpha+\varphi) \,|\, r \cdot \sin(\alpha+\varphi))$$
$$P(x|y) = (r \cdot \cos(\alpha) \,|\, r \cdot \sin(\alpha))$$



a)



b) 3500 H. kaufen bei A, 11200 bei B und 5200 bei C.
Berechne Verteilung im folgenden sowie im Vormonat.

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad V_0 = \begin{pmatrix} 3500 \\ 11200 \\ 5200 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = M \cdot V_0 = \begin{pmatrix} 4100 \\ 11250 \\ 4650 \end{pmatrix} \qquad V_2 = V_1 \cdot M = \begin{pmatrix} 4660 \\ 11215 \\ 4325 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = M \cdot V_{-1} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} \cdot V_0 = \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{E} \cdot V_{-1}$$

$$V_{-1} = M^{-1} \cdot V_0 = \begin{pmatrix} 2500 \\ 10800 \\ 6600 \end{pmatrix}$$

Übergangsgraph ?

Übergangsmatrizen

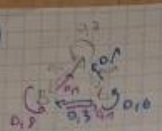
Übergangsmatrizen

Wie bei der Planungsrechnung beschreibt man hier stufenweise Vorgänge. Die Vorgänge stehen nun in zeitlicher Abfolge auf.
Bei stochastischen Übergangsprozessen nennt man Zustandsfolgen auch Markow-Kette.

Bsp.: In einer Kleinstadt mit ca. 20000 Haushalten gibt es drei große Supermärkte A, B und C zur Versorgung mit Waren. Kundenkreis wird so beschrieben:

	A	B	C
zu A	70%	10%	10%
zu B	20%	80%	30%
zu C	10%	10%	60%

a)



b) 3500 H. kaufen bei A, 11200 bei B und 5200 bei C.
Berechne Verteilung im folgenden sowie im Vormonat.

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \qquad V_0=\begin{pmatrix} 3500 \\ 11200 \\ 5300 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = M \cdot V_0 = \begin{pmatrix} 4100 \\ 11250 \\ 4650 \end{pmatrix} \qquad V_2 = V_1 \cdot M = \begin{pmatrix} 4660 \\ 11215 \\ 4325 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = M \cdot V_{-1} \quad \Rightarrow M^{-1} \cdot V_0 = \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{E} \cdot V_{-1}$$

$$V_{-1} = M^{-1} \cdot V_0 = \begin{pmatrix} 2500 \\ 10800 \\ 6600 \end{pmatrix}$$

Transformationen BS 145

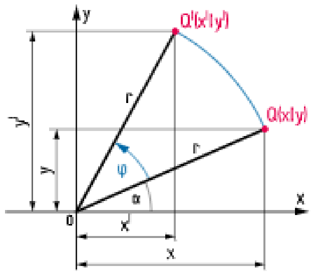
5.3.2 Transformationsmatrizen

Transformationen wie Drehungen oder Schiebungen können mithilfe von Matrizen durchgeführt werden. Die Transformation eines (Orts-)Vektors $\vec{x}$ erfolgt dabei durch linksseitige Multiplikation mit einer **Transformationsmatrix** T.

Für den transformierten (Orts-)Vektor $\vec{x}'$ gilt: $\vec{x}' = T \cdot \vec{x}$

Drehungen

Ein Punkt Q(x|y) befindet sich in einem Abstand r zum Koordinatenursprung O. Dabei schließt die Strecke OQ mit der x-Achse den Winkel α ein. Dreht man OQ um den Winkel φ in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn), so erhält man den Punkt Q′(x′|y′).



Die Position von Q kann mithilfe eines Vektors angegeben werden:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für Q′ erhält man:

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha + \varphi) \\ r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi) \\ y \cdot \cos(\varphi) + x \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix kann als Ergebnis folgender Matrizenmultiplikation angeschrieben werden:

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

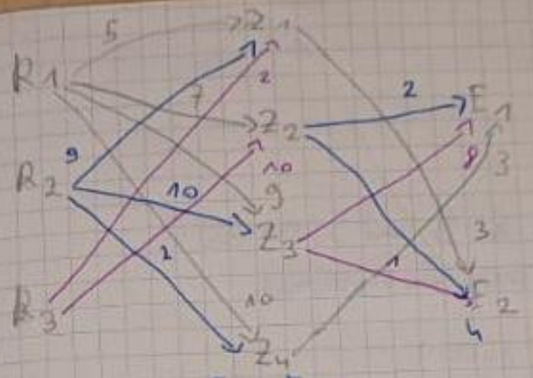
D … **Drehmatrix**

- Drehung eines Punkts P(x|y) in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ um den Koordinatenursprung: $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
- Drehung eines Punkts P(x|y|z) in $\mathbb{R}^3$ um den Winkel φ um die z-Achse: $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Planungsrechnung

Planungsrechnung

(B) In einem 2-stufigen Produktionsprozess werden aus 3 Rohstoffen (R) zunächst die Zwischenprodukte (Z) und daraus die Endprodukte (E) hergestellt (laut Graphik)



$$A = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 10 \\ 12 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A \cdot B = C = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 116 & 52 \\ 14 & 37 \\ 20 & 46 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es sollen nun 140 E_1 und 130 E_2 hergestellt werden.

$$R = C \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} 116 & 52 \\ 14 & 37 \\ 20 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,000 \\ 6\,770 \\ 8\,780 \end{pmatrix}$$

DGL

Grundbegriffe ?

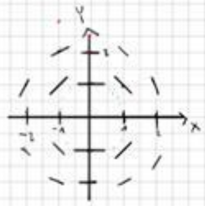
Richtungsfeld

Bsp.: $3y \cdot y'(x) + 3x = 0$ $\quad | -3x \quad | :(3y)$ implizit

→ Richtungsfeld

$y' = -\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}y}$ explizit

Punkt	Steigung y'
$(1\|1)$	$-\frac{1}{1} = -1$
$(0\|1)$	$-\frac{0}{1} = 0$
$(0\|-1)$	$-\frac{0}{(-1)} = 0$
$(-1\|1)$	$-\frac{(-1)}{1} = 1$
$(1\|0)$	$-\frac{1}{0}$
$(-1\|2)$	$+\frac{1}{2}$
$(-2\|1)$	$+\frac{2}{1}$



Vermutung: $x^2 + y^2 = r^2$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (Kreis) $= (r^2 - x^2)^{1/2}$

Probe: $y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{y}$

$\frac{1}{y}$

$(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left((r^2 - x^2)^{1/2}\right)^{-1} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

Anfertigen des Richtungsfeldes

1) DGL muss 1. Ordnung sein!
2) DGL explizit darstellen.
3) Berechnung von y' für geeignete $(x|y)$
4) Tangenten in Punkte einzeichnen
5) Vermutung + Probe

Einfache DGL

$y' = 3x^2$

$y(x) = \int 3x^2\,dx = \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + C = \underline{x^3 + C}$ allgemeines Integral

$P(2|3)$

$3 = 2^3 + C \Rightarrow C = -5$

$\underline{y = x^3 - 5}$ partikuläres Integral

Bsp: $3y \cdot y'(x) + 3x = 0$ implizit

$\rightarrow$ Richtungsfeld

Separable DGL (Trennung der Variablen)

Anfangsbedingungen oder Randbedingungen zur Bestimmung des partikulären Integrals

Anfangsbed.: für $x = x_0$ sind Werte von $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ gegeben.

Randbedingung: gegeben sind verschiedene Werte von verschiedenen Stellen der Fkt.

Bsp.: $y'' = 2x^2$

$$y' = \int 2x^2 \, dx = 2\frac{x^3}{3} + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{2}{3}x^3 + C_1\right) dx = \frac{\cancel{2}^{1}}{3}\frac{x^4}{\cancel{4}_{2}} + C_1 \cdot x + C_2 = \frac{1}{6}x^4 + C_1 x + C_2$$

Bsp.: Ein Gegenstand wird in einer Höhe von 7 m mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $2\,m/s$ nach oben geschleudert.

a) Wie lauten die Anfangsbedingungen?

b) Beschreiben sie die Flugbahn.

c) Nach welcher Zeit fällt der Gegenstand zu Boden?

a) $y(0) = 7\,m$

$\dot{y}(0) = 2\,m/s$

Abschuss $t = 0$

$h = y$

$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt} = \ddot{y}$

b) $\ddot{y} = -g$

$\dot{y} = -gt + c_1$ $\qquad \dot{y}(0) = 2\,m/s = -g \cdot 0 + c_1 \Rightarrow C_1 = 2\,m/s$

$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1 \cdot t + C_2$ $\qquad y(0) = 7\,m = -\frac{g \cdot 0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 7\,m$

$\underline{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2t + 7}$

c) $0 = -\frac{gt^2}{2} + 2t + 7$

$\underline{t = 1{,}41\,s}$

Separable DGL

allgemein : $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$

$y' = \frac{dy}{dx}$

allgemeine Lösung (TRENNUNG d. VARIABLEN)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$G(y) = F(x) + C_1$$

$$\Rightarrow y = G^{-1}\left(F(x)\right) + C$$

Beispiel zu Trennung der Variablen

Bsp: $y' = x^2 \cdot y$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = x^2 \, dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C_1 \qquad \ln|y| = \frac{x^3}{3} + \ln C$$

$$y = e^{\frac{x^3}{3} + C_1} = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C} = C \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \qquad y = e^{\frac{x^3}{3} + \ln C} = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \underbrace{e^{\ln C}}_{C} = C\, e^{\frac{x^3}{3}}$$

Bsp: $y' = \frac{y}{x-2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-2}$$

$$\ln|y| = \ln|x-2| + \ln(C) = \ln\left(|x-2| \cdot C\right)$$

$$\underline{\underline{y = C \cdot (x-2)}}$$

Lineare DGL erster Ordnung

Lineare DGLen erster Ordnung

BS79 → wichtige Begriffe

$$y' + Q(x) \cdot y = S(x)$$

$S(x) = 0$: lin. homogenen DGL 1. Ordnung

$S(x) \neq 0$: lin. inhomogenen DGL 1. Ordnung

allgemeine Lösung

1) hom. DGL

$$y' + Q(x) \cdot y = 0 \qquad \Big| -Q(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -Q(x) \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int Q(x)\, dx$$

$$\ln|y| = -\int Q(x)\, dx + C_1$$

$$y_h = C \cdot e^{-\int Q(x)\, dx}$$

HILFE

$$e^{-\int Q(x)\, dx + C_1} = e^{-\int Q(x)\, dx} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C}$$

Lösungen von $y' + Q(x) \cdot y = S(x)$ hat die Gestalt $y = y_h + y_p$

homogene Lösung

partikuläre Lösung d. inhomogenen GL

Lösung d. inhomogenen GL

2) inhomoge DGL

Methode d. Variation d. Konstanten

Ansatz: $\underline{y_p = C(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}}$

einsetzen in DGL $\quad y' + a(x)\cdot y = s(x)$

$y_p(x) = a(x) \cdot b(x) \qquad y_p'(x) = a'(x)\cdot b(x) + b'(x)\cdot a(x)$

$y_p' + a(x)\cdot y_p = s(x)$

NR: $y_p' = C'(x)\cdot e^{-\int a(x)\,dx} + C(x)\cdot e^{-\int a(x)\,dx}\cdot(-a(x))$

$= C'(x)\cdot e^{-\int a(x)\,dx} - a(x)\cdot C(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}$

$C'(x)\cdot e^{-\int a(x)\,dx} - \cancel{a(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int a(x)\,dx}} + \cancel{a(x)\, C(x)\cdot e^{-\int a(x)\,dx}} = s(x)$

$\Rightarrow C'(x) = \dfrac{s(x)}{e^{-\int a(x)\,dx}} = s(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx}$

$y_p = \Big(\underbrace{\int s(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx}\,dx}_{C(x) = \int C'(x)\,dx}\Big)\, e^{-\int a(x)\,dx}$

dh: $y = y_h + y_p = e^{-\int a(x)\,dx}\Big(C + \underbrace{\int \underbrace{s(x)}_{0}\, e^{\int a(x)\,dx}\,dx}\Big)$

Bsp: $y' + \underbrace{3x^2}_{a(x)}\, y = \underbrace{0}_{s(x)} \quad \Big/ - 3x^2 y$

$\dfrac{dy}{dx} = -3x^2 y$

$\int \dfrac{dy}{y} = -3\int x^2\,dx$

$\ln|y| = -x^3 + \ln(C)$

$\underline{\underline{y = C \cdot e^{-x^3}}}$

hom. DGL : $y' + \frac{y}{x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln(C) = \ln \frac{C}{x}$$

$$y_h = \frac{C_1}{x}$$

inhom DGL : $y_p = \frac{C(x)}{x} = C(x) \cdot x^{-1}$

NR: $y_p' = C'(x) \cdot x^{-1} - C(x) \cdot x^{-2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$

$$y_p' + \frac{y_p}{x} = x^2 + 4$$

$$\underbrace{\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}}_{y_p'} + \frac{\overset{y_p}{C(x)}}{x \cdot x} = x^2 + 4$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} = x^2 + 4 \qquad | \cdot x$$

$$C'(x) = (x^2 + 4) \cdot x$$

$$C'(x) = x^3 + 4x$$

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{\cancel{4}^{2} x^2}{\cancel{2}_{1}} + C_2$$

$$y_p = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3}{4} + 2 \cdot x + \frac{C_2}{x}$$

$$y = y_h + y_p = \frac{C_1}{x} + \frac{x^3}{4} + 2x + \frac{C_2}{x} = \underline{\underline{\frac{C}{x} + \frac{x^3}{4} + 2x}}$$

$$\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x} = \frac{C}{x} \qquad C = C_1 + C_2$$

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lineare DGL 2 Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = S(x) \qquad \text{mit } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$S(x)$ ← Störfunktion

a) homogene DGL

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Satz

- wenn y_1 eine Lösungsfkt ist, so ist auch $c_1 y_1$ Lösungsfkt.
- $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ hat 2 lin. unabhängige Lösungsfkten y_1 und y_2 $\Rightarrow$ $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$
- der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert eine Lösung

$\Rightarrow$ Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} + a_1 \lambda \cancel{e^{\lambda x}} + a_2 \cancel{e^{\lambda x}} = 0 \qquad | : e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$ charakteristische Gl. ergibt die Eigenwerte λ_1 und λ_2

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot 1 \cdot a_2}}{2 \cdot 1}$$

1. Fall: λ_1 und λ_2 reell

$$Y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reell

$$Y_h = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda x}$$

3. Fall λ_1 und λ_2 sind konjugiert komplex

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi$$

$$\left(e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)\right)$$

$$Y_h = e^{ax}\left(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)\right)$$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

Bsp 1: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$

$$Y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{x}$$

Bsp 2: $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = 2$$

$$Y_h = (C_1 + C_2 \cdot x)\, e^{2x}$$

Bsp 3: $y'' + y = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm\sqrt{j^2} = \pm j$$

$a = 0$

$b = 1$

$$z = \underline{a} \pm \underline{b} \cdot j$$

$$Y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

b) inhomogene DGL

Lösung $y = y_h + y_p$

1. Lösungsmöglichkeit für y_p: Variation der Konstanten

Bsp: $y'' - 5y' + 6y = x^2$

homogen: $y'' - 5y' + 6y = 0$ Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$

$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

inhomogene: $y_p = C_1(x) e^{3x} + C_2(x) e^{2x}$

$\rightarrow y' = C_1' e^{3x} + C_1 3 e^{3x} + C_2' e^{2x} + C_2\, 2 \cdot e^{2x} = C_1 3 e^{3x} + C_2 2 e^{2x}$

1. Bedingung: $C_1' e^{3x} + C_2' e^{2x} = 0$ *

* willkürliche Bedingung wegen C_1, C_2 (= 2 Unbekannte) aber DGL (= nur 1 Bedingung)

$\rightarrow y'' = 3 C_1' e^{3x} + 9 C_1 e^{3x} + C_2' 2 e^{2x} + 4 C_2 e^{2x}$

einsetzen in DGL $y'' - 5y' + 6y = x^2$

$3C_1' e^{3x} + 9C_1 e^{3x} + 2C_2' e^{2x} + 4C_2 e^{2x} - 5(3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x}) + 6(C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}) = x^2$

2. Bed.

$3C_1' e^{3x} + 2C_2' e^{2x} + (\underbrace{9 - 15 + 6}_{=0}) C_1 e^{3x} + (\underbrace{4 - 10 + 6}_{=0}) C_2 e^{2x} = x^2$

a b)

1) $C_1' e^{3x} + C_2' e^{2x} = 0$ $\quad | \cdot (-2)$ $\quad | \cdot (-3)$

2) $3C_1' e^{3x} + 2C_2' e^{2x} = x^2$

a))

$$1)\ -2\cdot C_1' e^{3x} - 2C_2' e^{2x} = 0$$

$$2)\ 3\, C_1' e^{3x} + 2C_2' e^{2x} = x^2$$

$$C_1' \, e^{3x} = x^2$$

$$C_1 = \int \left(x^2 e^{-3x}\right) dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2\times p.I}}{=} -\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)e^{-3x}$$

b) $$-C_2' e^{2x} = x^2$$

$$C_2' = -x^2 \cdot e^{-2x}$$

$$C_2 = \int \left(-x^2 e^{-2x}\right) dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2\times p I}}{=} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$$

$$y_p = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5x}{18} + \frac{19}{108}$$

Spezielle Ansätze

2. Lösungsmöglichkeit : spezieller Ansatz

(1) $$\boxed{s(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \Rightarrow \text{Ansatz: } y_p = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i}$$

Bsp $y'' - 5y' + 6y = x^2$

$y_h = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{2x}$ (bereits bei Var. d. Konst berechnet)

Ansatz:

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

einsetzen in Angabe

$$2a - 5 \cdot (2ax + b) + 6 \cdot (ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$2a - 10ax - 5b + 6ax^2 + 6bx + 6c = x^2$$

$$6ax^2 + (-10a + 6b) \cdot x + (2a - 5b + 6c) = x^2 + 0 \cdot x + 0$$

Koeffizientenvergleich

$6a = 1$ $\qquad$ $-10a + 6b = 0$ $\qquad$ $2a - 5b + 6c = 0$

$a = \frac{1}{6}$

$-10 \cdot \frac{1}{6} + 6b = 0$

$6b = \frac{10}{6}$

$b = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$2 \cdot \frac{1}{6} - 5 \cdot \frac{5}{18} + 6c = 0$

$6c = \frac{19}{18}$

$c = \frac{19}{108}$

$$y = \underbrace{C_1 \cdot e^{3x} + C_2 e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}}_{y_p}$$

Bsp: $y'' - 3y' = x^2 + 2$

Ansatz: $y_p = a\cdot x^3 + bx^2 + c\cdot x + d$

wenn $y'' + a_1 y' = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ ($d_h\ a_2 = 0$)

$y'' + a_1 y' + a_2 y = \sum \ldots$

$$\boxed{\text{Ansatz } y_p = \sum_{i=0}^{n+1} b_i x^i}$$

homogen

$y'' - 3y' = 0$ Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 3) = 0$

PNS: $\lambda = 0$ oder $\lambda = 3$

$$y_h = C_1 \cdot e^{0\cdot x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y_p'' = 6ax + 2b$

$6ax + 2b - 3\cdot(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 2$

$6ax + 2b - 9ax^2 - 6bx - 3c = x^2 + 0\cdot x + 2$

$-9a = 1$ $\quad$ $6a - 6b = 0$ $\quad$ $2b - 3c = 2$

$a = -\frac{1}{9}$ $\quad$ $6a = 6b$ $\quad$ $2\cdot\left(-\frac{1}{9}\right) - 3c = 2$

$b = -\frac{1}{9}$

$3c = -\frac{2}{9} - \frac{18}{9} = \frac{-20}{9}$

$c = -\frac{20}{27}$

$$\underline{y = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{20}{27}x}$$

weitere Ansätze für spezielle $s(x)$ möglich

(2)

$$s(x) = a \cdot e^{mx}$$

wenn m in der charakteristische Gleichung

- keine Wurzel ist $\Rightarrow y_p = b \cdot e^{x}$
- einfache Wurzel ist $\Rightarrow y_p = b \cdot x \cdot e^{mx}$
- zweifache Wurzel ist $\Rightarrow y_p = b \cdot x^2 e^{mx}$

} *

ad *) $\lambda^2 - 4 = 0$ $\quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$ $\quad m = 2$ ist einfache Wurzel

$(\lambda-2)^2 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = 2$ $\quad m = 2$ ist zweifache Wurzel

Bsp ad (2) $\quad y'' - 4y = e^{3x}$ $\quad$ Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

homogen: $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

inhomogen: $y_p = b \cdot e^{3x}$ $\quad m = 3$ siehe Angabe

$$9b \cdot \cancel{e^{3x}} - 4 \cdot b\cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}} \quad | : e^{3x}$$

$$9b - 4b = 1$$

$$5b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$$

③ $s(x) = a \cdot \cos(mx) + b \cdot \sin(m \cdot x)$

- wenn $\cos(mx)$ und $\sin(mx)$ nicht Lösungen der homogenen Gl. sind

$$\Rightarrow y_p = A \cdot \cos(m \cdot x) + B \cdot \sin(m \cdot x)$$

- wenn $y_h = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \cdot \sin(\omega x)$ und $m = \omega$

$$\Rightarrow y_p = A \cdot x \cdot \cos(m \cdot x) + B \cdot x \sin(m \cdot x)$$

Bsp ad ③ $\quad y'' + y = \sin(2x) \quad$ Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1$

$\lambda_1 = i \,;\, \lambda_2 = -i$

$$y_h = e^{\overset{0}{a}x} \left(C_1 \cdot \cos(bx) + C_2 \sin(b\, x) \right)$$

homogen $y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \qquad m = 1$

inhomogen $m \neq \omega$ $\quad y_p = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x) \qquad \omega = 2$

$y_p' = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$

$y_p'' = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + A\cos(2x) + B\sin(2x) = \sin(2x) + 0 \cdot \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -4A + A = 0 \\ -4B + B = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$y = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x) - \frac{1}{3} \sin(2x)$$

(4) $s(x)$ ist Linearkombination der obigen Fälle

$\Rightarrow y_p$ ist Linearkombination der Ansätze

Bsp (4) $y'' + y' - 2y = x + x^2 + \cos(x)$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 1$

homogen: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

inhomogen $\left.\begin{aligned} y_{p_1} &= ax^2 + bx + c \\ y_{p_2} &= d\cos(x) + e\sin(x) \end{aligned}\right\} y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

P_1: $2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x + x^2$

$-2a = 1$ $\quad$ $+2a - 2b = 1$ $\quad$ $2a + b - 2c = 0$

$a = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - 2b = 1$ $\quad$ $/+1$ $\quad$ $\cancel{2}\cdot(-\frac{1}{\cancel{2}}) - 1 - 2c = 0$ $\quad$ $/+2$

$-2b = 2$ $\quad$ $c = -1$

$b = -1$

$y_{p_1} = -\frac{1}{2}x^2 - 1x - 1$

P_2: $-d\cos(x) - e\sin(x) - d\sin(x) + e\cos(x) - 2d\cos(x) - 2e\sin(x) = \cos(x)$

$-d + e - 2d = 1$ $\quad\rightarrow\quad$ $e - 3d = 1$ $\quad /3$

$-e - d - 2e = 0$ $\quad\quad\quad$ $-3e - d = 0$

$-10d = 3$

$d = -\frac{3}{10}$, $e = \frac{1}{10}$

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{x^2}{2} - x - 1 - \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)}$$


Andri (18)
aus Wels
mitten
im LEBEN!