Mathe SA

Inhalt

Kombinatorik

Abzähltechnick = Man erhält die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch Addition.

Permutation

Eine Anordnung von n Elementen nennt man eine **Permutation** (latein: „permutare“ = vertauschen).

Möchte man zum Beispiel drei verschiedenfärbige Kugeln (eine gelbe, eine rote und eine blaue) anordnen, so hat man folgende Möglichkeiten:

Für den 1. Platz hat man drei und für den 2. Platz noch zwei Farben zur Wahl. Für den letzten Platz bleibt nur noch eine Farbe übrig. Es gibt also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Anstelle von **3 · 2 · 1** kann man auch **3!** schreiben [sprich: „3 **Faktorielle**“ oder „3 **Fakultät**“].

Allgemein kann man die Anzahl der Möglichkeiten, n **verschiedene** Elemente unterschiedlich anzuordnen, mit $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ berechnen. In diesem Fall spricht man auch von einer **Permutation ohne Wiederholung**.

Wird im obigen Beispiel eine rote Kugel durch eine weitere gelbe Kugel ersetzt, so erhält man:

Je zwei der abgebildeten Fälle stellen die gleiche Anordnung dar. Es entfallen daher jeweils jene 2! Möglichkeiten, die dem Vertauschen der gelben Kugeln entsprechen.
Es müssen also die ursprünglich 3! Möglichkeiten durch 2! dividiert werden:

$\frac{3!}{2!} = 3$ Möglichkeiten

n! (n-Faktorielle)
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ mit $n \in \mathbb{N}$
Es gilt: $0! = 1$ und $1! = 1$

Permutation ohne Wiederholung: n unterscheidbare **Elemente** werden **angeordnet**.
$P = n!$

Permutation mit Wiederholung: n Elemente, von denen **r, s, t, …** Elemente **jeweils gleich** sind, werden **angeordnet**.

$P_W = \frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t! \cdot \ldots}$

Variation

Eine **Auswahl von k** Elementen **aus** einer Grundmenge von **n Elementen** nennt man **Variation**, wenn die **Anordnung** (Reihenfolge) der ausgewählten Elemente **berücksichtigt** wird. Jede mögliche Auswahl führt auf eine Folge von k Elementen.

Kann **jedes Element nur einmal** ausgewählt werden („Ziehen OHNE Zurücklegen"), erhält man eine Folge von k verschiedenen Elementen und spricht von einer **Variation ohne Wiederholung**. Können **Elemente auch mehrfach** ausgewählt werden („Ziehen MIT Zurücklegen"), spricht man von einer **Variation mit Wiederholung**. Man erhält eine Folge, in der das gleiche Element auch mehrfach vorkommen kann.

ZB: Aus den 6 Buchstaben A B C D E F soll ein 4-stelliger Code erstellt werden.
Jeder Buchstabe darf nur einmal vorkommen.
Für die 1. Stelle stehen 6 Buchstaben zur Verfügung, für die 2. Stelle stehen 5 Buchstaben zur Verfügung, usw. Insgesamt gibt es also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Möglichkeiten.
Um diesen Ausdruck mithilfe der Faktoriellen anschreiben zu können, wird erweitert:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

Allgemein: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Darf der Code hingegen auch gleiche Buchstaben enthalten, so kann man die Anzahl der möglichen Codes folgendermaßen ermitteln:
Beim 1. Zug hat man 6 Buchstaben zur Verfügung, ebenso bei allen weiteren Zügen. Insgesamt kann man also $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1\,296$ verschiedene Codes bilden.

Aus **n** verschiedenen Elementen werden **k** verschiedene Elemente **ausgewählt**. Die **Anordnung** (Reihenfolge) der ausgewählten Elemente wird **berücksichtigt**.

Variationen ohne Wiederholung: Jedes Element kann nur einmal ausgewählt werden.

$V = \frac{n!}{(n-k)!}$

Variation mit Wiederholung: Elemente können auch mehrfach ausgewählt werden.

$V_w = n^k$

Binomischer Lehrsatz

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{mit} \quad n, k \in \mathbb{N}$$

Kombination ohne Wiederholung

Kombination ohne Wiederholung
Aus **n verschiedenen Elementen** werden **k verschiedene Elemente** ausgewählt. Jedes Element kann nur einmal ausgewählt werden. Die **Reihenfolge** der Auswahl ist **nicht von Bedeutung**.

$$C = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$\binom{n}{k}$ … Binomialkoeffizient **„n über k"**

Kombination mit Wiederholung

Kombination mit Wiederholung
Aus **n** verschiedenen **Elementen** wird **k mal ausgewählt**. Jedes Element kann **mehrfach ausgewählt** werden. Die **Reihenfolge** der Auswahl ist **nicht von Bedeutung**.

$$C_W = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace- Experiment

Die **Wahrscheinlichkeit** P (latein: „probabilitas" = Wahrscheinlichkeit), dass bei der Ausführung eines Laplace-Experiments ein bestimmtes Ereignis E eintritt, wird folgendermaßen festgelegt:

Für ein **Laplace-Experiment** gilt: $P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$

ZB Beim Würfeln mit einem fairen Würfel sollen die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Ereignisse ermittelt werden.

- E_1 ... Augenzahl 6 würfeln: Anzahl der günstigen Fälle ... 1; Anzahl der möglichen Fälle ... 6 $\Big\}$ $P(E_1) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$
- E_2 ... Würfeln einer geraden Augenzahl: Anzahl der günstigen Fälle ... 3; Anzahl der möglichen Fälle ... 6 $\Big\}$ $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\ \%$

Alle Ergebnisse, die nicht zu einem bestimmten Ereignis E gehören, bilden das Gegenereignis von E. Für dieses Gegenereignis „nicht E" schreibt man kurz $\neg E$ oder $\overline{E}$. Die Wahrscheinlichkeit von „nicht E" bezeichnet man als **Gegenwahrscheinlichkeit**. Es gilt: $P(\neg E) = 1 - P(E)$

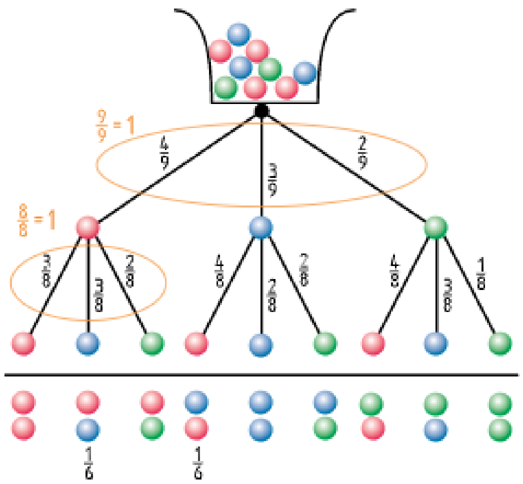
ZB $P(\text{Augenzahl ist nicht 6}) = 1 - P(\text{Augenzahl ist 6}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten gelten einige Grundaussagen, die nicht bewiesen werden können, sondern festgelegt wurden. Solche Aussagen nennt man Axiome. Der russische Mathematiker Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 – 1987) formulierte 1933 die folgenden Axiome:

P(nicht E) = 1 – P(E)	„nicht E" ... Gegenereignis von E
P(E) = 0	Die Wahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ereignisses ist 0.
$P(E) \geqslant 0$	Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine nichtnegative reelle Zahl.
P(E) = 1	Die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses ist 1.

Baumdiagramm

ZB: In einer Schachtel befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Zwei Kugeln werden hintereinander ohne Zurücklegen gezogen.



Beim 1. Zug sind drei Ausgänge mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{9}$ und $\frac{2}{9}$ möglich.

Die drei möglichen Versuchsausgänge werden durch drei Linien dargestellt, die mit den Einzelwahrscheinlichkeiten beschriftet sind. Am Ende jeder Linie ist das jeweilige Ergebnis angegeben. Da die Ergebnisse einander ausschließen, muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten den Wert 1 ergeben.

Für jedes Ergebnis des 1. Zugs wird nun der zweite Zug dargestellt. Jeder Pfad durch das Diagramm beschreibt jeweils einen Versuchsausgang.

Ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, eine rote Kugel und eine blaue Kugel in beliebiger Reihenfolge zu ziehen, so sucht man am Ende des Diagramms alle Ergebnisse, die diesem Ereignis entsprechen. Für jedes dieser Ergebnisse wird die zugehörige Wahrscheinlichkeit ermittelt, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads multipliziert, da es sich um eine „UND"-Verknüpfung handelt. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden anschließend addiert, da es sich um eine „ODER"-Verknüpfung handelt.

$$\left.\begin{array}{l} P(\text{● und ●}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6} \\ P(\text{● und ●}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\text{●● oder ●●}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}3333... \approx 33{,}3\ \%$$

Es ergeben sich folgende Regeln:

1. Pfadregel – „UND"-Verknüpfung
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, das einem bestimmten Pfad entspricht, erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfads multipliziert.

2. Pfadregel – „ODER"-Verknüpfung
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das sich aus mehreren Ergebnissen zusammensetzt, ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Gegenwahrscheinlichkeit

Alle Ergebnisse, die nicht zu einem bestimmten Ereignis E gehören, bilden das Gegenereignis von E. Für dieses Gegenereignis „nicht E" schreibt man kurz $\neg E$ oder $\bar{E}$. Die Wahrscheinlichkeit von „nicht E" bezeichnet man als **Gegenwahrscheinlichkeit**. Es gilt: $P(\neg E) = 1 - P(E)$

ZB: P(Augenzahl ist nicht 6) = 1 – P(Augenzahl ist 6) = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Gegenwahrscheinlichkeit: P(nicht E) = 1 – P(E)

bedingte Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes)

Durch Umformen erhält man die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \Rightarrow \quad P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}$

Der Zusammenhang zwischen den bedingten Wahrscheinlichkeiten P(A|B) und P(B|A) wurde von Thomas Bayes (englischer Mathematiker und Theologe, um 1701 – 1761) formuliert und wird **Satz von Bayes** genannt. Da $P(B \wedge A) = P(A \wedge B)$, gilt:

$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Satz von Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion f(X=3)

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion f** ordnet jedem Wert x einer diskreten Zufallsvariablen X die entsprechende Wahrscheinlichkeit zu.

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{für } x = x_1, x_2, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion diskreter Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** f ordnet jedem Wert einer diskreten Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit zu, dass X **genau** diesen Wert annimmt: $f(x_i) = P(X = x_i)$

Die Summe aller Funktionswerte von f ist 1. Zur Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsfunktion wird meist ein Stabdiagramm verwendet. Sie kann auch als Balkendiagramm mit der Balkenbreite 1 dargestellt werden.

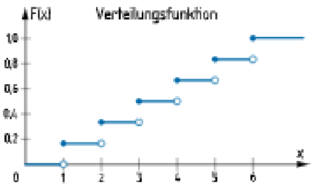
ZB Ist die Zufallsvariable X die gewürfelte Augenzahl, so kann sie die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen.

ZB: Für x = 1 gilt: $P(X = 1) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{6}$

Verteilungsfunktion F(X<=3)

Die **Verteilungsfunktion** F ordnet jedem Wert einer diskreten Zufallsvariable X die Wahrscheinlichkeit zu, dass X **höchstens** diesen Wert annimmt: $F(x) = P(X \leqslant x)$
Sie ist also die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten bis zu diesem Wert.
Die Funktion F ist stückweise konstant, also eine Treppenfunktion. Links vom kleinsten Wert, den X annehmen kann, ist F(x) gleich 0, ab dem größten Wert, den X annehmen kann, ist F(x) gleich 1.

ZB Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl beim Würfeln höchstens 2 ist, ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
$P(X \leqslant 2) = P(X = 1 \text{ ODER } X = 2) \quad \Rightarrow$
$F(2) = f(1) + f(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



Die **Verteilungsfunktion F** ordnet jedem Wert x einer diskreten Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit zu, dass die Zufallsvariable höchstens diesen Wert annimmt.
$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_i f(x_i) \qquad \text{für } x_i \leqslant x$

Standardabweichung, Erwartungswert

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei diskreten Verteilungen

9.3 Würfle mit einem Würfel 20-mal. Berechne das arithmetische Mittel der Augenzahlen. Vergleicht die Ergebnisse in der Klasse.

Der **Erwartungswert** E(X) einer Zufallsvariablen X ist jener Wert, den die Variable im Mittel annimmt. Um zu berechnen, wie stark die Werte um diesen Mittelwert streuen, berechnet man die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert, die sogenannte Varianz V(X). Das in der Praxis verwendete Maß ist die Wurzel aus der Varianz, die sogenannte **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{V(X)}$ (vgl. Band 2, Abschnitt 10.2.2).

Erwartungswert E(X) einer diskreten Zufallsvariablen

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$$

Varianz V(X) und Standardabweichung σ einer diskreten Zufallsvariablen

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot f(x_i)) - \mu^2 \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Binomialverteilung

Bernoulli-Experiment

Bernoulli-Experiment

- Es sind genau zwei Ergebnisse möglich.
- Bei jeder Durchführung des Zufallsexperiments ist die Erfolgswahrscheinlichkeit gleich.
- Es sind beliebig viele voneinander unabängige Wiederholungen des Zufallsexperiments möglich.