Zusammenfassung: Folgenreihen

Inhalt

Konvergenz

Konvergent = wenn die Summe eine reelle Zahl ist und es einen Grenzwert besitzt.

Anhand der folgenden Reihen wird zunächst ein **Kriterium** erläutert, welches die Entscheidung ermöglicht, ob eine Reihe **divergent** sein muss oder **konvergent** sein kann.

- $0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + \ldots$
  Bildet man die Teilsummenfolge s_n, so erkennt man: $s_{n+1} = s_n + 0{,}1$
  Der Zuwachs beträgt konstant 0,1. Die Partialsummenfolge kann daher nicht konvergent sein. Die Reihe ist also divergent.
- $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$
  Die Reihenglieder nähern sich dem Wert 0, die Partialsummen s_n nähern sich dem Wert $1{,}\dot{1}$.
  Die Reihe ist daher konvergent.
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$
  Auch für diese Reihenglieder gilt $a_n \to 0$. In Band 3, Abschnitt 1.7.4, wurde bereits gezeigt, dass diese Reihe, die **harmonische Reihe**, divergent ist.

Notwendige Konvergenzbedingung für unendliche Reihen
Die Glieder jeder konvergenten unendlichen Reihe bilden eine **Nullfolge**. Es gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = 0$
Der Umkehrschluss gilt nicht. Ist $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = 0$, so kann die Reihe auch divergent sein.
Ist jedoch $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) \neq 0$, so ist die Reihe sicher divergent.

Leibnitz

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left| \underbrace{(-1)^{n+1}}_{1} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \right| = 1 \cdot 0 = 0$ konvergent

s= a1 - a2

a1 = $(-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{1^2} = 1$

a2 = $(-1)^{2+1} \cdot \frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

a3 = $1 \cdot \frac{1}{9}$

$S = \underbrace{1}_{a_1} - \underbrace{(-\frac{1}{4})}_{a_2} = \boxed{\frac{5}{4} > 0}$

$S = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{a_2} - \underbrace{\frac{1}{9}}_{a_3} = \boxed{-0{,}36 < 1}$

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen
Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \ldots$ mit $a_n > 0$ ist konvergent mit dem Grenzwert S, wenn die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $0 < S < a_1$

Beweis:

$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 \pm \ldots$

- $a_n > a_{n+1}$, da monoton fallend

$S = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + \underbrace{(a_5 - a_6)}_{>0} + \underbrace{(a_7 - a_8)}_{>0} + \ldots$ $\Rightarrow S > 0$

$S = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{>0} - \underbrace{(a_6 - a_7)}_{>0} - \ldots$ $\Rightarrow S < a_1$

Damit gilt: $0 < S < a_1$ ... Die Reihe konvergiert. q. e. d.

Leibniz-Kriterium für **alternierende Reihen**
Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \ldots$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge bildet.

Quotientenkriterium

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \Rightarrow g = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = 0 < 1$

$\frac{1}{(2n+1)!} \to 0$, $\frac{1}{(2n)!} \to 0$

konvergent

Existiert zu einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Grenzwert g, so gilt:

Quotientenkriterium

$g = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Wurzelkriterium

$g = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Ist $g < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
Ist $g > 1$, so divergiert die Reihe.
Ist $g = 1$, so ist eine Entscheidung über die Konvergenz oder die Divergenz nicht möglich.

Wurzelkriterium

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+2n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n}{1+2n}\right)^2 \right|} = 0 < 1$ konvergent

$\to 0$

$\to 0$

Majorantenkriterium

Für zwei unendliche Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $|a_n| \leqslant b_n$ für fast alle Glieder gilt:

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Divergenz einer Reihe kann mithilfe einer divergenten **Minorante** gezeigt werden.

Minorantenkriterium

In ähnlicher Weise kann die **Divergenz** einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gezeigt werden, indem die Glieder mit jenen einer divergenten Reihe verglichen werden. Dieses Kriterium nennt man **Minorantenkriterium** (latein: „minor" = kleiner).

Minorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist divergent. Gilt für fast alle Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $a_n \geqslant b_n \geqslant 0$ ist, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nennt man **divergente Minorante**.

Nicht immer kann mithilfe des Majoranten- bzw. Minorantenkriteriums über die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe entschieden werden.

(a) $a(n) := \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$

$$\lim_{n \to \infty} a(n) \to 0$$

Min.

Verfahren: ~~Majorantenkriterium~~

$b(n) := \frac{1}{n}$

konvergent

$n := 2 .. 10$

$$a(n) = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.408 \\ 0.289 \\ 0.224 \\ 0.183 \\ 0.154 \\ 0.134 \\ 0.118 \\ 0.105 \end{bmatrix} \qquad b(n) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.333 \\ 0.25 \\ 0.2 \\ 0.167 \\ 0.143 \\ 0.125 \\ 0.111 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Potenzreihe

Eine **Potenzreihe** P ist eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \ldots \text{ mit } c_n \in \mathbb{R}.$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots$ sind dabei die Koeffizienten der Potenzreihe.

Zu jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion existiert eine solche Potenzreihe. Zum Beispiel lautet für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ die zugehörige Potenzreihe:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \ldots$$

Bei der näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Funktionswerts wird nach endlich vielen Gliedern abgebrochen. Für $x = 3$ und $n = 4$ ergibt sich zB:

$$e^3 \approx 1 + \frac{1}{1!} \cdot 3 + \frac{1}{2!} \cdot 3^2 + \frac{1}{3!} \cdot 3^3 + \frac{1}{4!} \cdot 3^4 \approx 16{,}375$$